habr Публикации Пользователи Хабы Компании Песочница Войти Регистрация

maisvendoo 30 июня 2015 в 10:48

Магия тензорной алгебры: Часть 1 — что такое тензор и для чего он нужен?

Математика

Содержание

Введение

Это было очень давно, когда я учился классе в десятом. Среди довольно скудного в научном плане фонда районной библиотеки мне попалась книга — Угаров В. А. «Специальная теория относительности». Эта тема интересовала меня в то время, но информации школьных учебников и справочников было явно недостаточно.

Однако, книгу эту я читать не смог, по той причине, что большинство уравнений представлялись там в виде тензорных соотношений. Позже, в университете, программа подготовки по моей специальности не предусматривала изучение тензорного исчисления, хотя малопонятный термин «тензор» всплывал довольно часто в некоторых специальных курсах. Например, было жутко непонятно, почему матрица, содержащая моменты инерции твердого тела гордо именуется тензором инерции.

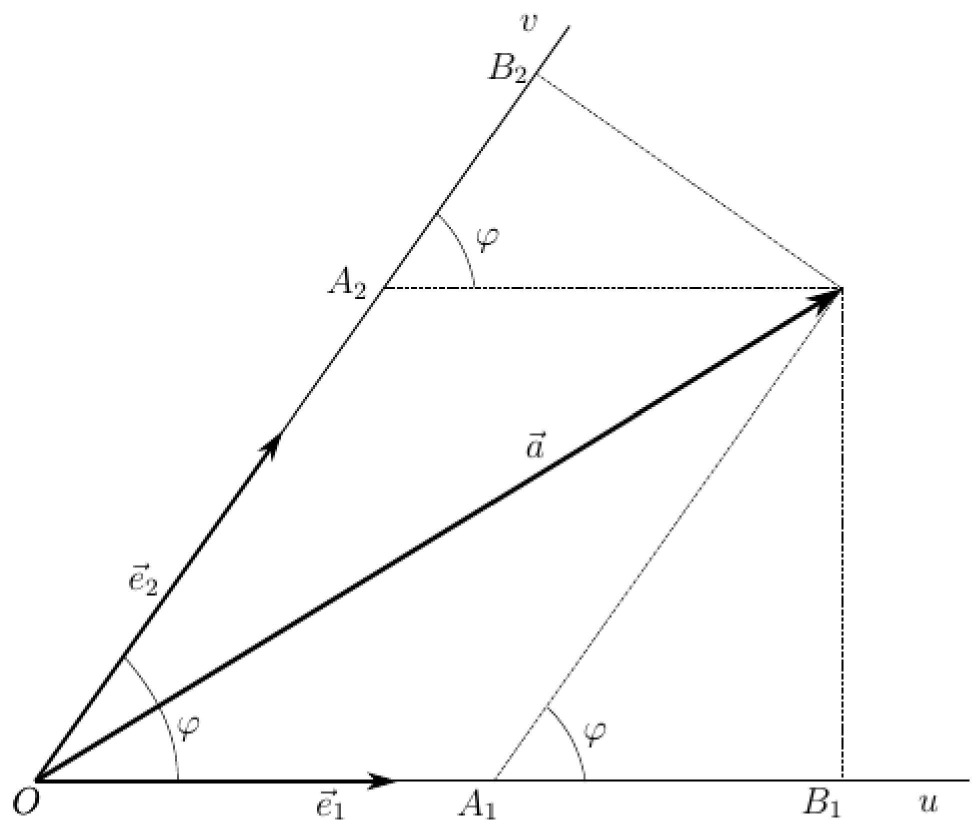
Погружение в специальную литературу не приносило просветления. Технарю достаточно тяжело переварить строгий абстрактный язык чистой математики. Тем не менее, от случая к случаю я возвращался к этому вопросу, и вот спустя почти шестнадцать лет наступило просветление, о чем и будет рассказано под катом. Возможно, мои рассуждения покажутся примитивными и упрощенными, но понимание любой сложной вещи принято разворачивать от процесса оперирования простыми понятиями, поэтому начнем.

1. Вектор на плоскости. Контравариантные, ковариантные координаты и связь между ними

Рассмотрим вектор, и без потери общности наших рассуждений, рассмотрим вектор заданный на плоскости. Как известно из курса ещё школьной геометрии, любой вектор можно задать на плоскости с помощью двух неколлинеарных векторов

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2. \quad (1)$$

Здесь $a^i,\ i = \overline{1,2}$ — коэффициенты разложения, (под верхним индексом следует понимать именно номер компоненты, а не возведение в степень), называемые *контрвариантные* координаты вектора $\vec{a}$. Геометрически это можно изобразить так, как показано на рисунке ниже. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называют базисными, угол между ними, при условии $\varphi \neq 0, \pi$, может быть произвольным, произвольна так же ненулевая длина базисных векторов. Указанный базис задает косоугольную систему координат на плоскости, с осями (u, v).



Исходя из чертежа длины отрезков OA_1 и OA_2 равны

$$OA_1 = a^1\,|\vec{e}_1|\,,\, OA_2 = a^2\,|\vec{e}_2| \quad (2)$$

Однако, это не единственный способ определить вектор $\vec{a}$ в данной системе координат. Его можно так же задать ортогональными проекциями на оси (u, v). Нетрудно видеть, что эти проекции равны

$$OB_1 = OA_1 + OA_2 \cos\varphi = a^1\,|\vec{e}_1| + a^2\,|\vec{e}_2| \cos\varphi \quad (3)$$
$$OB_2 = OA_1 \cos\varphi + OA_2 = a^1\,|\vec{e}_1| \cos\varphi + a^2\,|\vec{e}_2| \quad (4)$$

С другой стороны, выразим длины этих проекций через длины базисных векторов таким образом

$$OB_1 = a_u = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \frac{a_1}{|\vec{e}_1|} \quad (5)$$
$$OB_2 = a_v = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = \frac{a_2}{|\vec{e}_2|} \quad (6)$$

где $a_1 = \vec{a}\cdot\vec{e}_1$ и $a_2 = \vec{a}\cdot\vec{e}_2$ — *ковариантные* координаты вектора $\vec{a}$.

Сравниваем (3), (5) и (4), (6)

$$\frac{a_1}{|\vec{e}_1|} = a^1\,|\vec{e}_1| + a^2\,|\vec{e}_2| \cos\varphi \quad (7)$$
$$\frac{a_2}{|\vec{e}_2|} = a^1\,|\vec{e}_1| \cos\varphi + a^2\,|\vec{e}_2| \quad (8)$$

Умножим (7) на $|\vec{e}_1|$, а (8)
на $|\vec{e}_2|$ и преобразуем их

$$a_1 = a^1(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + a^2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \quad (9)$$
$$a_2 = a^1(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + a^2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) \quad (10)$$

Введем матрицу

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

тогда (9) и (10) можно выразить следующим соотношением

$$a_i = \sum_{j=1}^{2} g_{ij} a^j, \; i = 1, 2 \quad (12)$$

Выражение (12) дает связь между ковариантными контравариантными координатами вектора, определяемую лишь видом матрицы $\mathbf{g}$, зависящей от длин взаимного расположения базисных векторов. Пока никак не будем интерпретировать полученный результат, а просто запомним его.

Набор контравариантных и ковариантных компонент, по сути, задают в выбранном базисе один и тот же вектор. При использовании контравариантных координат этот вектор задается матрицей-столбцом

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

а в ковариантной форме — матрицей-строкой

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

2. Скалярное произведение векторов

Перейдем к пространству более высокой размерности и рассмотрим два вектора

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3, \; \vec{b} = b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3$$

где базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, как и выше, ненулевые
некомпланарные векторы. Перемножим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ скалярно.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3\right) \cdot \left(b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3\right)$$

В последнем выражении аккуратно раскроем скобки

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a^1b^1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1) + a^2b^1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + a^3b^1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3) +$$
$$a^1b^2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + a^2b^2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) + a^3b^2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3) +$$
$$a^1b^3(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3) + a^2b^3(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3) + a^3b^3(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3)$$

и снова введем матрицу

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

и тогда скалярное произведение можно свернуть весьма компактным образом

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} g_{ij}a^j\right)b^i \quad (15)$$

Первое, что можно заметить, при уменьшении числа измерений пространства мы перейдем от (14) к (11) а выражение (15) будет работать и давать склярное произведение векторов, но уже на плоскости. То есть мы получили некую обобщающую форму записи операции скалярного умножения, не зависящую ни от размерности пространства, ни от рассматриваемого базиса, все свойства которого обраны в матрице $\mathbf{g}$. Внимательно взглянув на (15) мы поймем ещё одну вещь

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ij}a^j,\ i = 1,2,3 \quad (16)$$

что есть ничто иное как ковариантные координаты вектора $\vec{a}$. То есть, (15) можно переписать

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b^i \quad (17)$$

Но и это не предел упрощения

3. Правило Эйнштейна

Хитный и проницательный Альберт Эйнштейн придумал правило суммирования, в выражениях подобных (17), избавляющее математика от надоедливой и избыточной $\sum$. В выражениях (16) и (17) можно опустить знак суммы, подразумевая суммирование по повторяющемуся индексу, который называют «немым». То есть, (16) переписываем так

$$a_i = g_{ij}\,a^j,\ i = 1,2,3 \quad (18)$$

здесь *j* — индекс, по которому происходит суммирование. По правилу, этот индекс должен чередовать свое положение — если у первого множителя он внизу, то у второго должен быть вверху и наоборот. Выражение (17) будет выглядеть так

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i\, b^i \quad (19)$$

Ну а (15) придет к виду

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = g_{ij}\, a^j\, b^i \quad (20)$$

А теперь мы посмотрим, для чего надо было городить такой огород.

4. Анализ на простых примерах

Допустим, что наш базис — декартов, то есть ортонормированый. Тогда, матрица $\mathbf{g}$ становится единичной

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пусть вектор $\vec{a}$ задан в таком базисе. Квадрат длины вектора, как известно, это скалярное произведение этого вектора самого на себя, то есть

$$\begin{aligned} &|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = g_{ij}\, a^j\, a^i = \left(g_{11}a^1 + g_{12}a^2 + g_{13}a^3\right)\, a^1 + \\ &+ \left(g_{21}a^1 + g_{22}a^2 + g_{23}a^3\right)\, a^2 + \\ &+ \left(g_{31}a^1 + g_{32}a^2 + g_{33}a^3\right)\, a^3 = \\ &= (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \end{aligned}$$

И мы получили… квадрат длины вектора, заданного в прямоугольной системе координат!

Ещё пример, дабы не загроможнать который, будем работать в двух измерениях. Пусть система координат подобна той, что изображена на рисунке из параграфа 1, и в ней задан вектор $\vec{b}$ своими контравариантными гоординатами. Тогда

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

где φ — угол между векторами базиса. Вычислим длину вектора $\vec{b}$

$$\begin{aligned} &|\vec{b}|^2 = \vec{b}\cdot\vec{b} = g_{ij}\, b^j\, b^i = \left(g_{11}b^1 + g_{12}b^2\right)\, b^1 + \left(g_{21}b^1 + g_{22}b^2\right)\, b^2 = \\ &= (b^1)^2 + b^2\, b^1\cos\varphi + b^1\, b^2\cos\varphi + (b^2)^2 = \\ &= (b^1)^2 + (b^2)^2 + 2\, b^1\, b^2\cos\varphi \end{aligned}$$

Ровно такой же результат мы получим, если воспользуемся теоремой косинусов и найдем квадрат длины диагонали параллелограмма.

Что получается? Работая в разных системах координат, мы использовали одну единственную формулу (20) для вычисления скалярного произведения. И её вид совершенно не зависит ни от базиса, ни от числе измерений пространства, в котором мы работаем. Базисом определяются лишь конкретные значения компонент матрицы $\mathbf{g}$.

Так вот, уравнение (20) выражает скалярное произведение двух векторов в *тензорной, то есть независимой от выбранного базиса форме*.

Матрица $\mathbf{g}$ задает так называемый *метрический тензор*. Её вид
определяет каким образом в выбранных координатах вычисляется расстояние между двумя точками.

Но почему мы называем эту матрицу тензором? Следует понимать, что математическая форма, в данном случае квадратная матрица, содержащая набор компонент, это ещё не тензор. Понятие тензора несколько шире, и прежде чем мы скажем, что такое тензор, мы рассмотрим ещё один вопрос.

5. Преобразование метрического тензора при смене базиса

Перепишем соотношение (20) в матричной форме, так нам будет легче оперировать им

$$c = \mathbf{a}^{(0)T}\,\mathbf{g}^{(0)}\,\mathbf{b}^{(0)} \quad (21)$$

где c — скалярное произведение векторов. Верхний индекс несет смысл системы координат, в которой заданы векторы и определен метрический тензор. Скажем это система координат СК0. Преобразование вектора к некоторой другой системе
координат СК1 описывается матрицей преобразования $\mathbf{A}_{01}$, то есть

$$\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{A}_{01}\,\mathbf{a}^{(1)}, \quad \mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{A}_{01}\,\mathbf{b}^{(1)} \quad (22)$$

Подставим (22) в (21)
$c = \left(\mathbf{A}_{01}\,\mathbf{a}^{(1)}\right)^T\,\mathbf{g}^{(0)}\,\mathbf{A}_{01}\,\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{a}^{(1)T}\,\mathbf{A}_{01}^T\mathbf{g}^{(0)}\,\mathbf{A}_{01}\,\mathbf{b}^{(1)}$

в последнем выражении

$$\mathbf{A}_{01}^T\mathbf{g}^{(0)}\,\mathbf{A}_{01} = \mathbf{g}^{(1)}$$

метрический тензор, компоненты которого определяются новым базисом. То есть, в новом базисе операция имеет аналогичную форму

$$c = \mathbf{a}^{(1)T}\,\mathbf{g}^{(1)}\,\mathbf{b}^{(1)}$$

Тем самым мы показали ещё одно свойство тензора — *его компоненты меняются синхронно с компонентами векторов того пространства, в котором определен тензор*. То есть теперь мы можем сказать, что *тензор — это математический объект, представленный набором компонент и правилом их преобразования при смене базиса*.

Теперь, используя правило Эйнштейна, перепишем (22) и (23) в тензорной форме

$$a^{i(1)} = \alpha_k^i a^{k(0)}, \quad b^{i(1)} = \alpha_k^i b^{k(0)} \quad (24)$$

$$g_{ij}^{(1)} = \alpha_i^l\,\alpha_j^k\,g_{kl}^{(0)} \quad (25)$$

где α_p^q — элементы матрицы $\mathbf{A}_{01}$. Проиллюстрируем (25) на трехмерном примере. Пусть матрица преобразования координат имеет вид

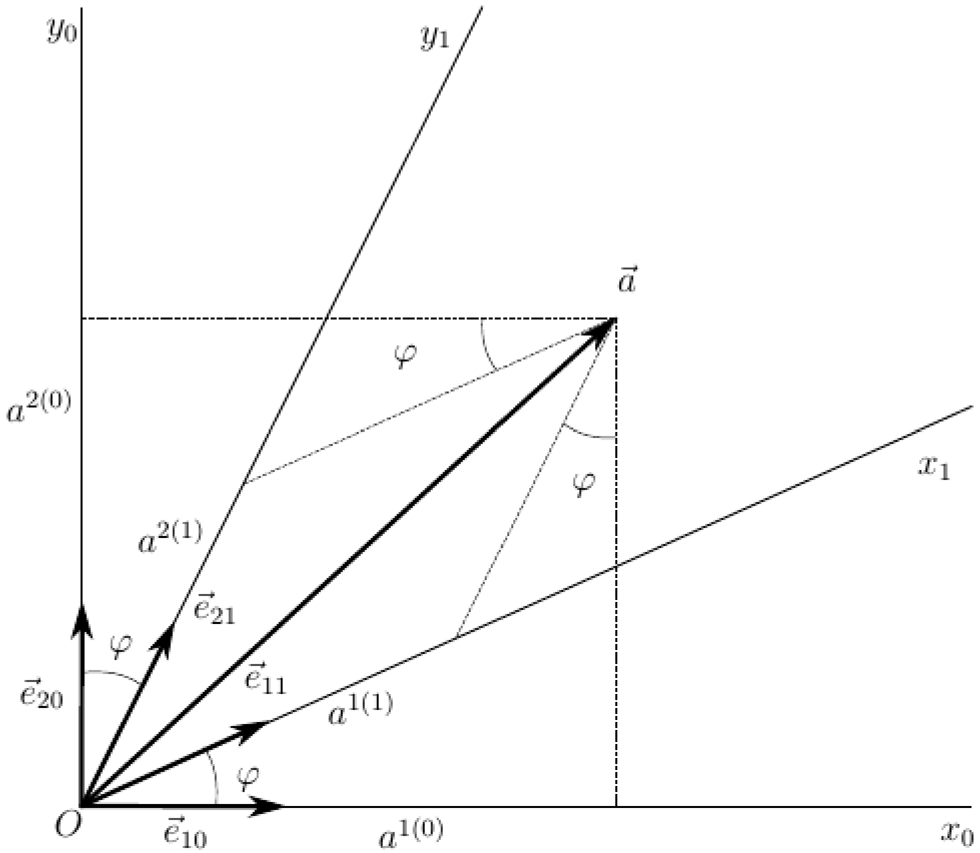
$$\mathbf{A}_{01} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{bmatrix}$$

Распишем преобразование компонента метрического тензора, выполняя суммирование по немым индексам *k* и *l* в (25)

$$g_{ij}^{(1)} = \alpha_i^1 \, \left(\alpha_j^1 \, g_{11}^{(0)} + \alpha_j^2 \, g_{21}^{(0)} + \alpha_j^3 \, g_{31}^{(0)}\right) + \\ \alpha_i^2 \, \left(\alpha_j^1 \, g_{12}^{(0)} + \alpha_j^2 \, g_{22}^{(0)} + \alpha_j^3 \, g_{32}^{(0)}\right) + \\ \alpha_i^3 \, \left(\alpha_j^1 \, g_{13}^{(0)} + \alpha_j^2 \, g_{23}^{(0)} + \alpha_j^3 \, g_{33}^{(0)}\right)$$

откуда видно что в (25) выполняется транспонирование матрицы перехода, умножение результата на метрический тензор и умножение полученной матрицы на матрицу перехода.

Теперь рассмотрим конкретный пример, на плоскости, чтобы не писать излишне громоздких выкладок



Пусть вектор $\vec{a}$ задан в двух нормированных базисах: прямоугольном $(\vec{e}_{10}, \, \vec{e}_{20})$ и косоугольном $(\vec{e}_{11}, \, \vec{e}_{21})$. Преобразование из косоугольной системы координат в прямоугольную выражается матрицей

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

обратное преобразование

$$\mathbf{A}_{10} = \mathbf{A}_{01}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} & -\dfrac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi} & \dfrac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \end{bmatrix}$$

Пусть также, в прямоугольных координатах наш вектор имеет компоненты

$$\mathbf{a}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

и совсем нетрудно увидеть, что длина его $|\vec{a}| = 5$. Метрический тензор в ортонормированном базисе представляется единичной матрицей

$$\mathbf{g}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

значит

$$|\vec{a}|^2 = g_{ij}^{(0)}\, a^{j(0)}\, a^{i(0)} = \left(g_{11}^{(0)}\, a^{1(0)} + g_{12}^{(0)}\, a^{2(0)}\right) a^{1(0)} + \left(g_{21}^{(0)}\, a^{1(0)} + g_{22}^{(0)}\, a^{2(0)}\right) a^{2(0)} \\ = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 9 + 16 = 25.$$

Зададим угол наклона осей $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ и вычислим контравариантные компоненты вектора в косоугольных осях

$$a^{1(1)} = \tilde{\alpha}_1^1\, a^{1(0)} + \tilde{\alpha}_2^1\, a^{2(0)} = 3\sqrt{3} - 4 \\ a^{2(1)} = \tilde{\alpha}_1^2\, a^{1(0)} + \tilde{\alpha}_2^2\, a^{2(0)} = -3 + 4\sqrt{3}$$

Вместе с вектором необходимо преобразовать и метрический тензор

$$g_{11}^{(1)} = \alpha_1^1 \left(\alpha_1^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_1^2 \left(\alpha_1^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ g_{12}^{(1)} = \alpha_1^1 \left(\alpha_2^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_1^2 \left(\alpha_2^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ g_{21}^{(1)} = \alpha_2^1 \left(\alpha_1^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_2^2 \left(\alpha_1^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ g_{22}^{(1)} = \alpha_2^1 \left(\alpha_2^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_2^2 \left(\alpha_2^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

Ну а теперь вычислим длину вектора в новом базисе

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}|^2 &= g_{ij}^{(1)}\, a^{j(1)}\, a^{i(1)} = \left(g_{11}^{(1)}\, a^{1(1)} + g_{12}^{(1)}\, a^{2(1)}\right) a^{1(1)} + \left(g_{21}^{(1)}\, a^{1(1)} + g_{22}^{(1)}\, a^{2(1)}\right) a^{2(1)} = \\
&= \left(3\sqrt{3} - 4 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\right)\left(3\sqrt{3} - 4\right) + \\
&+ \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{3} - 3 + 4\sqrt{3}\right)\left(-3 + 4\sqrt{3}\right) = \\
&= \frac{27}{2} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 8 - \frac{9}{2} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 24 = 9 + 16 = 25
\end{aligned}
$$

то есть

$$|\vec{a}| = 5,$$

и скалярное произведение и длина вектора *инвариантны*, то есть неизменны при преобразовании координат, а так и должно быть. При этом, мы использовали по сути одно и то же соотношение (20) для работы в разных базисах, предварительно преобразовав метрический тензор в соответствии с правилом преобразования векторов в рассматриваемых пространствах
(25).

Заключение и выводы

Что мы увидели в предыдущем параграфе? Если свойства пространства, в котором заданы векторы известны, то для нас не составляет труда выполнить, строго формальным образом, действия над векторами, используя соотношения, вид которых от формы пространства независим. Причем соотношения (20), (24) и (25) дают нам и алгоритм вычисления и способ преобразования компонент выражений, используемых алгоритмом. В этом — мощь и сила тензорного подхода.

Многие физические теории, например ОТО, оперируют искривленным пространством-временем, и там другой подход просто неприемлем. В искривленном пространстве-времени метрический тензор задан локально, в каждой его точке, и если попытаться обойтись без тензоров, у нас ничего не выйдет — мы получим громоздкие и неповоротливые уравнения, если получим их вообще.

В прикладных областях науки тензорная запись выражений применима там, где требуется получать уравнения, независимые от используемой системы координат.

Но это ещё не всё. Мы не поговорили о свойствах метрического тензора, не рассмотрели векторное произведение и тензор Леви-Чевиты. Не поговорили о ранге тензоров и операциях с ними, не разобрались до конца с правилами индексации компонент тензоров и о многом другом. Об этом будет написано несколько позднее, а пока — спасибо всем моим читателям за внимание.

Продолжение следует...

Метки: тензор, вектор, преобразование координат, инвариантные соотношения, тензорное исчисление

+56 822 189k 73

167,5 Карма · 0,2 Рейтинг · 193 Подписчики

Дмитрий Притыкин @maisvendoo
Пользователь

Сайт Сайт

Поделиться публикацией

ПОХОЖИЕ ПУБЛИКАЦИИ

2 июля 2015 в 01:10
Магия тензорной алгебры: Часть 2 — Векторные и тензорные операции. Ранги тензоров
+33 55k 233 3

1 июля 2015 в 12:04
Краткое введение в тензоры
+29 53,9k 204 26

4 июля 2012 в 10:49
О прямоугольных координатах и гексагональных сетках
+62 22,7k 302 51

ВАКАНСИИ Мой круг

Software developer/Researcher/Computer vision developer (Robotics) — от 100 000 до 200 000
Abagy Robotic Systems • Москва

Старший программист Python + Data Science — от 200 000
Homein • Москва

Специалист по криптографическим алгоритмам (R&D) — от 100 000
Swap • Москва • Возможна удаленная работа

С++ программист / Криптограф — от 120 000 до 180 000

EVEN Foundation • Москва • Возможна удаленная работа

C++ developer
HR BURO • Москва
от 150 000 до 200 000

Все вакансии Разместить вакансию

Яндекс.Директ

Английский для **путешествий**
Английский язык быстро и легко с нуля! Индивидуальные онлайн-занятия! Обращайтесь!

Реклама

Комментарии 73

netmaxed 30.06.15 в 12:23 +2

о да!
давно пора было освежить знания о тензорах!
ждем продолжения :)
P.S. очень хорошо и понятно пишете! спасибо.

ignat99 30.06.15 в 12:58 +1

Диакоптика или тензорный анализ цепей (электрических силовых схем).

Геометрическая алгебра хороший инструмент для работы с октонионами.

Если вместе с цепями в моделе учитывать и поля то октонионы позволяют упростить запись даже более чем тензоры. Хотя, IMHO, октонионы это то же тензоры, только основанные на диадах (более общий способ умножения тензоров).

potan 30.06.15 в 13:38 +1

Знакомство с тензорным исчислением и праволом Эйнштейна мне помогло и в программировании — в подходе к работе с коллекциями.

DrReiz 30.06.15 в 14:29 +1

Интересно! Где — тензоры, а где — коллекции… Расскажи, пожалуйста, подробнее: как правило Эйнштейна помогло при работе с коллекциями?

potan 30.06.15 в 16:37 +2

Такие операции с коллекциями как map, zip, fold (он же reduce) напоминают тензорные операции. Особенно это заметно на примере языков APL, R, Julia, но и в более мейнстримовых эта аналогия мне помогала.

kirilloid 30.06.15 в 19:30 +2

Да, знание тензоров может помочь, но если тензоров не знаешь, то, конечно, пытаться через них понять zip/fold — совершенно бесполезная затея.

andy_p 30.06.15 в 15:32 +2

Тогда вам надо с линейной алгебры рассказ начинать.

futureader 30.06.15 в 18:55 +7

Вообще, было бы не плохо начать с того, а зачем это все надо. А надо это для того, что бы описывать объекты в пространстве без учета системы координат. Так, когда описывают вектор как тензор, то имеют ввиду именно вектор как объект (буквально — палочку со стрелочкой), а не связанные с ним координаты в той или иной системе координат. Таким образом, когда мы начинаем смотреть на этот вектор из разных систем, то вектор (палочка со стрелочкой) не меняется, а меняется лишь его представление в системе координат. Поэтому, вектор силы, например — это тензор.

ignat99 30.06.15 в 19:12 0

Если в остове силовой схемы (трансформаторы) выделить остов в виде набора ветвей (катушек), то множество из линейной комбинации всех возможных соединений этих катушек будет описывать все возможные силовые схемы, которые можно собрать из этого набора катушек.

Более того, если в качестве базиса у нас есть другой набор катушек, то оперируя только тензорами, возможно получить параметры итоговых схем, которые можно собрать из этих двух наборов с учётом их взаимного влияния.

Как вы видите, у нас нет не палочек, не стрелочек, не направлений, не геометрических систем координат (у нас есть вместо этого отдельные части электрической сети), но мы используем тензоры.

futureader 30.06.15 в 19:32 +1

Как-то не очень понятно, что Вы имеете ввиду. Честно говоря, можно что угодно называть тензором, только тензором в математическом плане оно от этого является не будет. Для задания тензоров нужно — линейное пространство (ваши катушки?) и простарнство линейных форм (что это в вашем случае?) Аналогию с тензорами применяют много где, но это далеко не всегда является тензорами (хоть теперь это и модно так называть). Так же как когда-то в начали применять когда-то понятие «вектор» для описания коллекций объектов. Вектором из векторного анализа оно не стало.

ignat99 30.06.15 в 20:25 0

Аналогию с тензорами для катушек начал применять Габриэль Крон в 1926 году после прочтения книги Форсайта «Трактат о дифференциальных уравнениях».

Линейные дифференциальные формы как позитивные (0,1,2,3,4, ...) так и негативные -1, -2, -3, -4 можно разглядеть на алгебраических диаграммах в статье Диакоптика. Негативные формы более относятся к закону Фарадея, к сохранению различных моментов (электрических, магнитных и упругих и их комбинаций).

Детали для негативных степеней можно увидеть в таблице из этого скрипта.

maksbotan 01.07.15 в 01:55 +4

С точки зрения математика всегда конечно дико было смотреть на вот это вот «ну пусть есть индексы сверху, пусть есть снизу, будем менять их вот так, смотрите — круто». Но если людям удобно, почему нет :)

Хотя в голове все равно всплывают сопряженные пространства, тензорные произведения, базисы и прочая фигня. И интерпретация этого дела на многообразиях, связность, символы Кристоффеля… Ведь и для математики всё это имеет большое и интересное значение.
Спасибо за статью, обязательно продолжайте!

erlyvideo 01.07.15 в 09:48 +4

Я честно пытался понять статью с наскока, спасибо вам за неё.

Но вы упустили самое главное и я потерял мысль: с самого начала надо написать, зачем это нужно.

К сожалению, весь университетский курс этим страдает: заставляют втупую зубрить что-то со словами «потом разберетесь, годам к 35»

maisvendoo 01.07.15 в 09:59 0

> с самого начала надо написать, зачем это нужно

Учту это. Видимо главную мысль статьи мне пока не удалось сформулировать

IlyaPodkopaev 01.07.15 в 10:07 +1

все же индексы вверху — порочная практика, я всю статью боролся с тем, чтобы не читать их как степень. Отделение скобками помогает…

maisvendoo 01.07.15 в 10:14 +3

Тем не менее, практика принята в тензорном исчислении, и в подавляющем большинстве книг используется именно такая нотация.

Дело в том, что мы имеем дело с линейными операциями, поэтому верхнее положение индекса и не рассматривается здесь как показатель степени.

Если речь идет таки, например о квадрате компоненты, то пишут так
$a^1\,a^1 = (a^1)^2$

IlyaPodkopaev 01.07.15 в 13:30 +1

да, я так и подумал, что это общепринятое обозначение. Видимо зависит от того, какая запись принята в области, с которой сталкиваешься… К ней привыкаешь и уже не задумываешься

grossws 01.07.15 в 13:55 0

Хуже когда в рамках одной статьи (а то и выражения) верхний индекс обозначает разные вещи. В том же ML часть авторов использует верхний индекс в скобках (как номер примера для обучения) и, в том же выражении, верхний индекс без скобок (как степень). А иногда — догадывайся из контекста и обозначаний этой конкретной статьи.

FransuaMaryDelone 01.07.15 в 15:18 +1

К вопросу о красоте матриц (11) и (14). Вообще говоря, у скалярного произведения есть свойство эрмитовой симметричности. Т.е. порядок умножения важен: (e1, e2)=(e2, e1)*. Понятно, что в действительных числах это не играет роли. Но… красота же требует порядка.

Формула (22) на матрицу A01 написана для контрвариантных координат, а конкретная матрица A01 (сразу под рис. 2 где косинусы и синусы) выписана для ковариантных координат (если иметь ввиду рис. 2 и Ваше определение ковариантных координат после формул (5),(6)).
В этой связи непонятно слово «разумеется» при вычислении контрвариантных компонент вектора в косоугольных осях — использована матрица A10 (как заявлено, это матрица перехода из косоугольной в прямоугольную СК) при переходе наоборот из прямоугольной в косоугольную для контрвариантных векторов. Свойство может быть какое-то опущено в рассуждении?

merlin-vrn 02.07.15 в 13:06 +1

Так тогда и транспонирования в статье все нужно заменить эрмитовыми сопряжениями.

mayorovp 08.07.15 в 11:46 0

Вообще-то, до сих пор автор рассматривал только геометрические вектора — а у них координаты есть действительные числа, а не комплексные. Откуда тут возьмется сопряжение-то?

Во-вторых, вы как-то очень хитро поставили звездочку после скалярного умножения. Операция эрмитова сопряжения определена только для матриц — а результат скалярного умножения, внезапно, скаляр. Здесь надо поставить обычное комплексное сопряжение, а не эрмитово.

barmaley_exe 08.07.15 в 16:48 0

Никто не мешает считать скаляры матрицами размера 1x1.

maisvendoo 01.07.15 в 15:26 0

> использована матрица A10 (как заявлено, это матрица перехода из косоугольной в прямоугольную СК)

Там написано так

> Преобразование из прямоугольной системы координат в косоугольную выражается матрицей A01

что несомненно является допущенной мною опечаткой, так как матрица A01 — это матрица перехода из косоугольной в прямоугольную систему координат.

Спасибо, исправлено

FransuaMaryDelone 01.07.15 в 15:33 0

А, вон где опечатка. Все понял, спасибо.

FransuaMaryDelone 01.07.15 в 16:01 0

и все-таки… матрица A01 написана для контрвариантных координат? Просто у меня получается другая матрица.

maisvendoo 01.07.15 в 16:04 0

Для контравариантных. Проецируем ломаную, составленную из контравариантных компонент в СК1 на соответствующую ось СК0

FransuaMaryDelone 02.07.15 в 11:25 0

Да, Вы правы. Напоследок всё-таки хотелось бы отметить свойство матриц перехода между этими системами: A01(ковариантные координаты) = A10(контрвариантные координаты).

maisvendoo 01.07.15 в 16:02 +1

Кстати, в вики в статье Тензор была опечатка — векторы обозначались рангом (0, 1) а ковекторы рангом (1, 0), при том что метрический тензор указывался как (0, 2) то есть дважды ковариантный.

Взял на себя смелость внести правку — вектор (1, 0), ковектор (0, 1), согласно с источнику .

А то при разборе литературы для подготовки второй части статьи возникли нестыковки литературы и википедии…

progchip666 02.07.15 в 10:08 0

> Позже, в университете, программа подготовки по моей специальности не предусматривала изучение тензорного исчисления, хотя малопонятный термин «тензор» всплывал довольно часто в некоторых специальных курсах. Например, было жутко непонятно, почему матрица, содержащая моменты инерции твердого тела гордо именуется тензором инерции.

Аналогичная ситуация сложилась у меня. Когда большая часть «Теоретиеской физики» в нашем институте была построена на тензорах, а курс матанализа данную тему обходил далеко стороной. В результате приходилось либо заучивать длинные ряды формул, либо воспринимать курс «Теорфиза» как шаманство. Ни то ни другое знаний и понимания предмета к сожалению не прибавляло.
Очень интересно будет попытаться разобраться в этом хотя бы сейчас, много лет спустя в Вашей помощью.

APXEOLOG 02.07.15 в 17:42 +3

Было бы неплохо периодически говорить зачем мы начинаем те или иные преобразования. Я потерял смысловую нить уже к 5 уравнению, а когда взгляд упал на «Введем матрицу» (11), я совсем потерялся. Для меня все это выглядит как математика ради математики.

dcc0 04.07.15 в 21:03 0

Интересно, как количественно и качественно изменится понимание этого материала, если заменить терминологию? Даже было бы интересно провести такой эксперимент.
Почему-то думаю, что русский достаточен, чтобы отразить смысл, а латинизмы, которые повсеместно используются в научном мире, понимания не добавляют.

Arastas 04.07.15 в 23:12 0

Приведите, пожалуйста, 3-4 примера?

dcc0 05.07.15 в 00:30 0

Не доказано средствами самой математики, что в ней
содержатся разделы более сложные или менее сложные для восприятия человеком.
Также пока формально не доказано, что абстрактная алгебра сложнее комбинаторики, теории чисел, арифметики или иных разделов. Нет определений сложности относительного самого человека. Чем в принципе определяется сложность того или иного раздела математики для человека? Количеством разнородных операций, описанием объектов?

Не представлено формальных доказательств того, что если человек способен понять один раздел, алгебры, то он не способен понять другой.
Тут от формализма придется отступить, так как формальными средствами не доказано, что подход используемый для описания самой математики является верным или всегда верным.

Arastas 05.07.15 в 12:46 0

Спасибо, я Вас понял.

Zenitchik 05.07.15 в 17:08 0

Формальный подход к описанию — это аналог юнит-тестов. Без него математика разрушится.

dcc0 05.07.15 в 20:15 0

Слышал мнение некоторых математиков, которое заключается в следующем: «для описания математических явлений естественный язык не нужен». Вообще часто когда мы читаем какое-то новое определение, то его понимание приходит на примерах или, если хорошо владеем языком символов, то нам хватает формул. Из этого вытекает несколько вопросов педагогического характера. Можно было бы их и не озвучивать, но один все-таки повторю, этот вопрос связан с перенасыщенностью данной области знаниями терминами, в основном латинизмами. Чтобы понять, что такое тензор в математике, мне сначала приходится осознать — что есть тензор изначально, т.е. уходит много времени на осмысление корневого значения термина. Затем надо понять, почему именно в этом разделе математики употреблен именно этот термин, а не просто вектор.

erlyvideo 05.07.15 в 23:30 0

на самом деле, если разобраться, как этим пользуются физики, то всё становится гораздо понятнее и потом уже можно разобраться с формализмом.

Математики обычно отвратительно нудно и скучно рассказывают свою тему по сравнению с физиками. Но за вторыми сложно успеть.

Zenitchik 06.07.15 в 13:31 0

Я вот на счёт формализма от одного математика слышал, что теория оформляется в виде формальных определений, теорем и пр. для того, чтобы потом можно было быстро сопоставлять всё это с новыми открытиями в математике, а не думать каждый раз, что из чего и как выведено. Примерно ту же цель я преследую, когда запускаю старые юнит тесты после добавления нового функционала: быстро проверить, не поломал ли что.

dcc0 06.07.15 в 13:48 0

Вы не учитываете один момент: тот объем знаний, к которому пришла современная математика, охватывает развитие данной дисциплины за период — боюсь соврать — пусть, 2000 лет. И весь этот объем знаний предлагается усвоить человеку за период средняя школа + университет.
История математики кишит повторными открытиями одних и тех же явлений. Мне интересно лишь, изменится ли уровень знаний у выпускников, если изменить подход к преподаванию.
Ученые с многолетним опытом, конечно, не нуждаются в «математики на яблоках». Бесспорно.

ignat99 06.07.15 в 13:58 0

Я бы более скромную оценку поставил между 150 — 284 годами, в зависимости от какого события считать. После изучения фотографий Антикитеры, знакомства с принципом Астролябия и чтения переводов Ньютона на русский язык «О небесной геометрии».

Секстант (якобы Ньютон) — 1699. И информации о факте из документов: В 1731 году английский оптик Джон Хэдли усовершенствовал астролябию.

Zenitchik 06.07.15 в 14:03 0

Этим кишит не только история математики. Ещё интереснее бывает история биологии и палеонтологии. Многих ошибочных реконструкций (типа бродящих по дну брахиозавров) не было бы, если бы их авторы знали другие науки хотя бы в рамках школьного курса. Но как этого достичь — непонятно. То, чем не пользуешься — забывается у всех, это закономерно.
Ещё забавнее была новость о том, что биологи в начале 2000-х открыли C_y у какого-то морского гада (забыл, какого именно) — т.е. биологи XXI века удивлялись тому, что твёрдо знали братья Райт.

dcc0 06.07.15 в 19:17 0

Я, наверное, уже очень сильно отклонился от темы, в которой, конечно же, почти не ориентируюсь.
Но все же отмечу еще один момент — достаточно быстро развивается информатика, появляется
очень много терминологии, буквально каждый день. Информатика, математика и физика теперь сильно пересекаются, где-то смешиваются, и смешивается очень много терминологии, термины дополняются новыми значениями и т.д. Если можно так сказать, то терминология в общенаучном контексте превращается в некий водоворот.
В XIX веке даже еще в XX — это еще были волны, где-то предсказуемые, где не очень.

ignat99 06.07.15 в 19:19 0

Всё закономерно — программирование это расширение математики. И последние крупные математические работы тому доказательство.

dcc0 07.07.15 в 16:09 0

Я думаю, что достаточно остро в ближайшее время встанет вопрос о способах представления научной информации, под этим я подразумеваю и «сжатие»
информации для учебных целей. Думаю, это будет связано с требованиями самого времени, ведь и готовить и переподготавливать специалистов нужно довольно быстро. Во всяком случае быстрее, нежели раньше, а способы представления учебной информации пока, субъективно, к этому не очень располагают. Думаю, это тема отдельных исследований, возможно, лингвистических по большей части. Может, найдется, наконец, интересное применение для психолингвистики.

По поводу того, является ли программирование расширением математики, сужением логики, не стану судить. Тут можно дискутировать на тему эмулируется ли математика на логическом устройстве или формальная логика реализуется на математическом.

ignat99 07.07.15 в 18:49 0

Азбука это один пример сжатия информации для учебных целей. Лет 100 назад на каждую букву запоминали слово, а мне в школе давали только буквы. Таблица умножения второй пример. Таблица физики — третий пример. Периодическая система Менделеева — таблица химии — четвёртый пример.

rafuck 11.07.15 в 09:35 +1

У вас тут формула (21) не пронумерована, как бы абсурдно это ни звучало.
Пишу комментарием, потому что статей много, так проще.

maisvendoo 11.07.15 в 12:57 0

Не страшно, так как на (21) не ссылки в тексте. Писалось из LaTeX версии, там нумерация несколько отличалась

rafuck 12.07.15 в 05:51 +2

«Подставим (22) в (21)»
Я по этой фразе заметил, что (21) нету.

maisvendoo 12.07.15 в 12:16 0

Нашел потерянную формулу. Спасибо

Alexins 25.07.15 в 10:35 0

Тут самое главное, понимание. Для чего эта сложная штука нужна. Людям проще воспринимать занимательную математику, нежели смотреть на сухие формулы тригонометрии.

Косоугольные координаты переведем в прямоугольные координаты.
Воспринимать эту штуку очень сложно по рисунку 2. Для примера, косой угол между базисами рисунка 1 больше 90 градусов. Почему нет?

Пойдем дальше. Почему точка отсчета координат одна и та же. Два объекта, находящихся в пространстве, не вложенные один в другой, являются разными точками отсчета.

Возьмем практический пример. Все мы знаем металлическую метровую линейку с дырочкой. Дырочка нужна, чтобы линейку можно было повесить на гвоздик, на стене. Вот и скажем, что дырочка, будет началом вектора. Положим линейку на пол и посмотрим на нее.
Будем условно считать себя точкой отсчета координат. По правую руку будем откладывать ось X. Вперед, куда смотрят глаза, будет координата Y.
Постояли, посмотрели на линейку. Сделали несколько шагов, немного повернулись, посмотрели на линейку. Вот вам две не соосные системы координат с разными точками отсчета. В уме то мы соображаем, что линейка осталась одного размера.

Теперь возвращаемся к математике и пытаемся на пальцах объяснить что такое тензор. И как влияет изменение точки отсчета на матрицу пересчета координат вектора.

Дальше еще интереснее и вкуснее. Тут один из комментаторов приводил теорию с трансформатором. Раскладывал его на катушки и переставлял их.
Продолжим его исследования и одну из катушек поставим не вертикально, как все остальные, а на бок, чтобы она каталась по столу. Вот не задача, это уже не тривиальная задача в теории катушек.
Возвращаюсь к любимым линейкам и зайдем в подъезд многоэтажного дома. Положим одну линейку на несколько ступенек пролета, идущего вверх, а вторую на несколько ступенек пролета, идущего вниз. Смотрим на линейки и думаем, как бы применить тензор к разным векторам с одинаковой длиной. И пусть сухой математик объяснит, что это суть разные вектора, а не смещение координатных пространств относительно одного вектора (метровая линейка).

ignat99 25.07.15 в 12:38 0

> Продолжим его исследования и одну из катушек поставим не вертикально, как все остальные, а на бок, чтобы она каталась по столу. Вот не задача, это уже не тривиальная задача в теории катушек.

Эта задача сводиться к задаче движущейся электрической машине — электродвигателю.
Зазор между ротором и статором описывается Римановым пространством. В случае вращения с постоянной частотой (в короткие моменты времени такое приближение возможно) эта задача сводиться к «тривиальной» для метода расчленения Крона.

Alexins 26.07.15 в 01:09 0

Представим задачу с катушками более простым способом. Катушку можно представить в виде магнитной палочки из детского магнитного конструктора. Конструктор состоит из набора палочек с магнитами на концах и стальных шариков.
Одну палочку положим на гладкий стол и будем подносить конец другой палочки. Мы увидим, что палочка на столе будет поворачиваться обратной стороной магнита к палочке в нашей руке.
Усложним задачу. В руках у нас магнитная палочка, а на столе лежит катушка индуктивности, по которой не течет электрический ток. Подносим магнит. В катушке, под действием изменения внешнего магнитного поля начинает бежать электрический ток. Катушка становится магнитом и так же старается принять упорядоченное положение к магниту в нашей руке.
Изменение внешнего магнитного поля опять сказывается на образование заряда в катушке. И так действует до тех пор, пока катушка не займет определенного положения и магнитное поле для нее перестанет изменяться. В результате, в ней прекратиться выработка электрического тока и она станет инертной по отношению к магниту у нас в руке.
О таком не сложный примере, я говорил как о не самой простой задаче.
Стрелка амперметра или движение катушки диффузора динамика под действием тока внутри постоянного магнита, это одно. Я говорил о явлении наводящейся магнитной индукции.

ignat99 26.07.15 в 10:56 0

Модель для этой задачи можно легко сделать. Просто расскажу подход. В симплексной оболочке соответствующей задаче вершины это условные магнитные заряды, рёбра это линейно распределённый электрический заряд, грани 2 форма магнитного заряда, объёмы 3-форма плотности электрического заряда. Далее составляетсяситема уравнений.

Alexins 26.07.15 в 16:51 0

Честное слово, не хочу вас обидеть. Вы кажетесь умным человеком.
Обратимся к азам катушек индуктивности. Для примера, можно посмотреть ресурс базовые формулы. В теории магнитной индукции нет места разности потенциалов и точечным зарядам. Указанный термин «распределенного электрического заряда» не очень то подходит для описания происходящих процессов.
И я, описывая пример воздействия изменяемого магнитного поля на катушку, не говорил, что она подключена к нагрузке.
Электрический ток есть, а электрического потенциала нет.
Ладно, предлагаю мир. Мы немного ушли от темы. Истина всегда где то рядом.

ignat99 26.07.15 в 17:36 0

Мир так мир. Там не только токи и напряжения в цепи и на зажимах есть, как контурные e,i так и узловые E,I. Если, например, схема возбуждается только как контурная с переменными e и i, во всех парах узлов возникает ряд неизвестных разностей потенциала E. Эти напряжения — величины, которые можно измерить, и они образуют тензор.

Ну то есть кроме той первой оболочки имеется дуальная. Скажем каждое ребро пересекает дополнительная грань с электрическим потенциалом. А через грань с магнитной индукцией B проходит ребро напряжённости магнитного поля H.

ignat99 26.07.15 в 18:08 0

Правильно так: на каждом ребре (остова графа) контурной цепи можно выделить вершину (клемму) для измерения электрического потенциала. Так как потенциал это скаляр, а гранью будет электрическое смещение D. (Это для удобства рассмотрения прохождения электромагнитной волны через ортогональные цепи). Всё это примерная модель, просто попытка ответить на ваш вопрос. Если будет интерес, пишите в личную почту, что бы не отклоняться от темы.

ignat99 26.07.15 в 17:47 0

Вершины — условные магнитные заряды — точнее это магнитный поток через поверхность S вокруг вершины (число линий магнитной индукции).

Alexins 26.07.15 в 21:01 0

Если кому то стало интересно, в добрый путь. Основы теории электромагнитных полей являются уравнения Максвела.
Всё остальное очень тяжело воспринимается для не подготовленного человека.

На мой взгляд, математика и физика должны быть интересными и познавательными. Если удастся объяснить тяжелые вещи на простых примерах, значит вас будут слушать раскрыв рот, а не зевать во всю площадь лица.

ignat99 26.07.15 в 23:24 0

Вот как Крон изложил ту же самую тему, что в статье:

plotnikovna.narod.ru/kron.html

6opoDuJlo 04.08.15 в 04:54 0

Правильно ли получается, что смысл (15) -> (16) -> (17) в том, чтобы укоротить запись, а не в том, чтобы перевыразить скалярное произведение?

maisvendoo 04.08.15 в 11:15 0

(15) показывает место метрического тензора в вычислении скалярного произведения
(16) выражает связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора
(17) запись скалярного произведения через ковариантные компоненты одного вектора и контравариантные компоненты другого, да, по сути сокращенная запись для произвольного базиса (без использования правила Эйнштейна)

fpgaFAE 09.09.15 в 11:57 +5

Здравствуйте, Дмитрий!
Вы пишете очень интересно, но, к сожалению, в оформление статьи вкрался один труднообнаруживаемый баг, который сводит все ваши труды на НЕТ:

ваши формулы со временем «протухают», т.е. вместо красивой картинки с формулой со временем появляется сообщение:

Видимо, это сообщение появляется не сразу, а когда страница наберет достаточное количество просмотров, поэтому найти эту ошибку непросто.
Для исправления я могу порекомендовать надежный, но довольно трудоемкий путь: перегенерировать все формулы в картинки, загрузить эти картинки, например, на хабросторэдж и давать ссылки уже на эти картинки. Путь трудоемкий, но другого выхода я не вижу. Картинки генерируются со страницы редактирования формул по ссылке «Click here to Download Image (GIF)».

Буду рад, если вы возьмете на себя труд выполнить столь трудоемкую правку вашего текста

maisvendoo 09.09.15 в 18:41 0

Безусловно возьму на себя такой труд, тем более на первые три статьи есть черновики в LaTeX. Как только разгружусь с другими делами, а это будет в ближайшее время, буду устранять последствия катастрофы

fpgaFAE 10.09.15 в 13:26 0

Спасибо! Ситуация действительно неприятная, но работу по восстановлению можно существенно упростить, если написать несколько несложных скриптов, обрабатывающих ваши страницы. Например, все данные для формул уже забиты в строчках типа

> «latex.codecogs.com/gif.latex?
> OB_2&space;=&space;OA_1\cos\varphi&space;+&space;OA_2&space;=&space;a^1&space;\left|\vec{e}_1&space;\right|\cos\varphi&space;+&space;a^2&spa
> (4)»

Если в них заменить latex.codecogs.com/gif.latex? на latex.codecogs.com/gif.download?, то уже набранные формулы будут сохранены в виде gif-файла. Ручная правка, конечно потребуется, но ее будет значительно меньше

6opoDuJlo 24.09.15 в 00:07 0

К счастью, как минимум часть статей остались с иллюстрациями на Wayback machine.

sanchousf 13.01.16 в 18:28 0

у меня некоторые формулы отображаются вот так
\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b^i \quad

mayorovp 13.01.16 в 18:51 0

Посмотрите ссылку на них. Это что-то смешное…

habrastorage.org/getpro/habr/post_images/472/e80/ee0/472e80ee0a5a3e54cd9897c8acd24062.gif%5ET&space;%5Cmathbf%7Bg%7D%5E%7B(0)%7D%5C,%5
(23)

Такое ощущение, что кто-то (бот?), заливая на habrastorage картинки, залил только часть формулы :)

sanchousf 14.01.16 в 19:25 0

Скорее больше похоже что кто-то к ссылке добавил лишнего. Потому что работающие ссылки заканчиваются на .gif, а в тайтле формула, а в не работающей формула прям в ссылке.

mayorovp 14.01.16 в 20:12 0

Раньше (до загрузки на hstor) во всех ссылках были формулы — и по ним генерировалась картинка. А тут — картинка сгенерирована только по части формулы (ее видно если обрезать ссылку) — а остальная часть формулы осталась в ссылке. Потому я и подозреваю ошибку бота.

maisvendoo 02.03.16 в 07:59 +2

В Формулы в статье исправлены. Постепенно откорректирую все остальные mayorovp 02.03.16 в 09:18 0

Это временно. Придет бот и опять испортит :)

maisvendoo 02.03.16 в 10:25 0

Те статьи, что написаны с использованием ресурса Романа Парпалака остались в целости. Так что, будем надеяться, переживут

sanchousf 24.04.16 в 00:10 0

Мне все понятно с конравариантными координатами. Формула (1) даже показывает как имея контравариантые координаты и базис получить вектор.
Но мне не ясно как это сделать с ковариантными не переводя их в контравариантные? И мне интересно узнать зачем они нужны? Когда ковариантными координатами предпочтительнее пользоваться чем контравариантными?

Только полноправные пользователи могут оставлять комментарии. Войдите, пожалуйста.

САМОЕ ЧИТАЕМОЕ

Сутки Неделя Месяц

GitHub теперь официально принадлежит Microsoft

+83 55k 35 513

Нечестная игра, или как нас обманывают организаторы розыгрышей

+127 44,3k 55 176

Apple WWDC 2018: текстовая трансляция

+21 17,7k 7 10

АНБ предложило стандарт шифрования для устройств Интернета вещей, но ISO его отвергло

+38 21,4k 23 28

Сервис uLogin отправляет данные из форм (почта, телефон) на сторонний сайт и молчит об этом

+32 12k 13 26

ИНТЕРЕСНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

Чего стоит самое точное расписание электричек с 2003 года

+12 767 11 0

«Ингосстрах» устроил день технологий

+6 335 2 1

Как сделать смартфон немного тупее

+5 1,7k 2 15

Первую многоразовую российскую ракету обещают испытать в 2022 году

+7 3k 2 38

Телеграф, Western Union и ядерная война. Как США незаметно для всех создали систему оповещения о ядерной угрозе

+7 4,4k 8 3

© 2006 – 2018 «TM»